Cortina

ANNO LXIII - N. 2 - INVERNO 1996/97 - SPEDIZIONE IN A.P. COMMA 34 ART. 2 LEGGE 549/95 - CORTINA

PERIODICO A DIFFUSIONE MIRATA FONDATO NEL 1933

GIOCARE A PALLA CON ENRICO

Ovvero: la divertente topologia della Sfera

di Letterio Gatto

L'autunno, già da un pezzo cominciato, era ormai sul punto di cedere il passo a nonno Inverno. Eppure, per qualche inspiegabile anomalia meteorologica, nel cielo di quel pomeriggio brillava un sole che riusciva financo a intepidire l'aria, da qualche giorno usa a essere sferzata dal freddo. Al Bimbo doleva un po' il cuore all'idea di trascorrere quel luminoso pomeriggio d'inverno chiuso in casa come faceva già da qualche settimana. E decise di uscire a fare una passeggiata o, perchè no, trovando qualche amico disponibile, anche a prendere a calci un pallone, per scrollarsi di dosso gli incipienti torpori invernali. Bussò alla porta di alcuni dei suoi amici più cari ma non trovò nessuno: probabilmente non era l'unico ad aver avuto l'idea di fare due passi all'aria aperta. Una lieve brezza che s'era da poco levata rese di colpo l'aria più pungente e il Bimbo si rassegnò a rimettersi in cammino verso casa. Senonché, tornando sui suoi passi, si imbattè nella figura un po' seria, come si conviene a un signore dabbene, di Enrico il parrucchiere. Quel pomeriggio, forse per osservare un turno di riposo straordinario, o per chissà qual altro motivo, Enrico non era al lavoro.

"Ciao Enrico! Cosa fai a casa a quest'ora del pomeriggio? Non dovresti essere nel tuo negozio a rapare teste?".

"Ciao Bimbo. No! Oggi pomeriggio sono a riposo e non ho capelli da tosare. Comunque, teste da rapare non ne ho mica più molte, sai? Oggi i ragazzini come te preferiscono raccogliersi i capelli in fluenti code di cavallo... Ma tu? Tu perchè sei a spasso? Non dovresti essere a casa a fare i compiti?". "Beh, era una così bella giornata... veramente stavo cercando amici per andare a giocare a palla... Tu...".

Non ebbe tempo di terminare la frase che sull'espressione annoiata di Enrico si vide guizzare la luce dei suoi occhietti vispi che s'erano repentinamente illuminati. "Vuoi giocare a palla?". "Sì mi piacerebbe...". "E allora vieni dentro, che ci divertiremo tantissimo". Il Bimbo non capiva: "Ma come dentro? Giochiamo qui fuori, all'aperto...". "Ma no, ma no. Fuori fa un po' freddo. E poi si può giocare a palla in tanti modi. Vieni, te ne mostrerò qualcuno...".

Con un'aria vagamente rassegnata, il Bimbo accettò a malincuore l'invito di Enrico. Non era

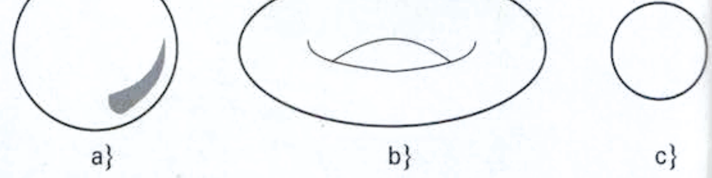

Fig. 1. a}, b}, c}.

a} La forma di un pallone da calcio, la sfera S^2, che è una *varietà bidimensionale*.

b} La forma di un salvagente, detto anche *toro*. Il *toro* è una superficie topologica di genere 1 (ha un solo "buco"). La sfera e il toro non sono superficie non *omeomorfe*.

c} La circonferenza, detta anche *sfera unidimensionale* o S^1.

Grafici Letterio Gatto

mai entrato in casa sua: l'atrio aveva l'aria di essere estremamente lindo e pulito e, pertanto, il Bimbo fu alquanto sorpreso quando constatò il disordine totale di quella che il barbiere chiamava la sua sala giochi. Nella quale, è vero, c'erano molti palloni da calcio, quelli fatti di cuoio duro e resistente, ma anche tante forbici sparse qua e là, aghi da sarto, salvagenti, e sacchi pieni di capelli di tutte le lunghezze e di tutti i colori: biondi, rossi, neri, grigi e persino bianchi.

"Ma Enrico, chiese stupito il Bimbo, cosa sono tutti questi capelli sparsi?: lavori anche qui?, nella tua sala giochi?".

"No, no, a casa io cerco di rilassarmi e per lo più vengo qui a giocare. E per giocare ho bisogno di molti capelli, che porto con me dal negozio".

Il Bimbo sgranava tanto d'occhi e guardava questi palloni da calcio dall'aria davvero strana: in quella stanza sembravano dover servire a tutto tranne che a essere usati per una partita di calcio.

"Vedi Bimbo, come parrucchiere, il mio sogno sarebbe quello di riuscire a pettinare una *sfera*, pardon, un pallone ma, purtroppo, so che questo è destinato a rimanere niente più che un sogno".

"Pettinare un pallone? Ma cosa vuoi dire?".

"Vedi questi capelli?", e con un gesto indicò un paio di sacchi dai quali traboccavano, "Li vorrei trapiantare tutti sulla superficie del pallone. E' per questo che mi servono gli spilli... Guarda un po', ecco... prendo un capello, lo appoggio sul pallone e con la punta dello spillo lo pianto sulla sua superficie di cuoio, premendolo un pochettino, così, e voilà..." e, così dicendo, aveva letteralmente piantato il capello sulla superficie sferica del pallone. "Adesso ne prendo un altro e lo metto qui... adesso ancora un altro...".

"Ma insomma, cosa vuoi fare?".

"Eh, cosa voglio fare! Mi piacerebbe riuscire a piantare un capello in ogni punto del pallone... ma non vi riuscirò mai...".

"E perchè?".

"Perchè la superficie del pallone ha infiniti punti e tutti i capelli dovrebbero essere infinitamente vicini...".

"No, no! Intendevo dire... perchè vuoi piantare un capello in ogni punto del pallone?".

"Perchè vorrei provare a pettinarlo...", e cominciò a lisciarlo con la mano come se volesse accarezzarlo.

Il Bimbo credeva ormai che l'anziano parrucchiere fosse uscito completamente di senno e si fece cogliere da un vago senso di inquietudine. Enrico, a cui piaceva sorprendere i suoi interlocutori, lo rassicurò e cominciò a spiegare...

"Vedi Bimbo, quand'ero piccino e andavo a scuola, la materia che più detestavo era la matematica. Era lunga, noiosa, tediosa... Ma poi, quando terminai gli studi e cominciai a lavorare nel negozio di mio padre, che ora mi appartiene, ho scoperto che, in realtà, nessuno ci aveva mai raccontato di matematica. La matematica, al contrario, è bella e divertente e ce n'è per tutti i gusti, anche per i poveri barbieri come me. Pensa che c'è un *teorema matematico* che dice

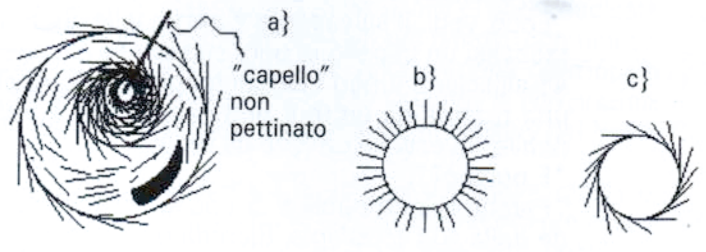

Fig. 2. a}, b}, c}.

a} La Sfera S^2, non è *pettinabile*. Per esempio, in figura, secondo la pettinatura illustrata, occorre rimuovere il "capello" indicato. Si ha così una "rosa", che in meteorologia corrisponde all'*occhio del ciclone*.

b} La circonferenza "*spettinata*"; i "capelli" sono "dritti" e non *tangenti*.

c} La circonferenza "*pettinata*"; i "capelli" sono *tangenti* alla circonferenza. S^1 è dunque pettinabile.

esattamente questo: *la sfera non è pettinabile...* (Fig. 2.a})".

"E che vuol dire?" chiese il Bimbo.

"Significa esattamente che se tu, davvero, riuscissi a piantare un capello in ogni punto di questo pallone e poi provassi a pettinarlo... cioè a lisciare i capelli in modo che siano *tangenti* alla sua superficie... (Fig 2.a}, b}, c})".

"... *tangenti*?"

"Sì, significa che il capello è adagiato lungo la superficie e non che rimane dritto così, come questo mio ciuffo...".

"Va bene, e allora?".

"E allora, insomma, non si può pettinare il pallone (Fig 2a}). Se tu ci provassi scopriresti che rimangono sempre almeno due capelli dritti...".

"Ma come è possibile, che cosa dici?".

"Esattamente quello che ho detto. Se vuoi che tutti i capelli di una sfera siano pettinati, devi toglierne almeno due".

"Io non ti capisco. E' qualcosa di assurdo. Come fai a provare una cosa del genere? Come faresti ad attaccare un capello in ogni punto della sfera? Ce ne sono infiniti, me l'hai appena detto...".

"E' vero, non posso farlo. Ma qui sta la bellezza della matematica. La matematica mi permette di dimostrare che, se fossi in grado di costruire una *sfera capelluta* come ti ho detto non sarei comunque in grado di pettinarla. I matematici dicono che la sfera non è pettinabile! Qualcuno lo chiama anche il *teorema del riccio*: gli aculei del riccio non sono pettinabili, ne devono rimanere sempre almeno due dritti... Il salvagente invece... Lo vedi quel *toro* (Fig. 1.b}), pardon, salvagente?".

continua a pagina 70

da pagina 69

"Sì, e allora?".
"Ecco, vedi. Il salvagente è pettinabile. Se tu attaccassi un capello in ogni suo punto riusciresti ad allisciarlo lungo i cerchi longitudinali. Anche una tazzina da caffè è pettinabile. Non è pettinabile, invece, un pallone da rugby".
"E perchè?".
"Perchè la pettinabilità di una superficie dipende dalla sua *topologia*. Ricorda quel che hai imparato da Bernardo il fornaio: due superficie si dicono *omeomorfe* se una qualunque di esse può essere deformata con continuità (cioè senza strappi o incollamenti) fino ad assomigliare all'altra... se tu pensassi alla *sfera fatta di quella gomma fantastica che si tira e si tira e non si rompe mai*, capiresti che l'ovale da rugby si può vedere come una sfera schiacciata e allungata. E' quindi omeomorfo a una sfera. Il toro e la tazzina da caffè sono omeomorfi tra di loro, ma non sono omeomorfi alla sfera (la sfera non ha buchi) (Figg. 1.a} e 1.b}). E ciò lo si vede anche dal fatto che i primi sono pettinabili mentre l'altra no".
"Ma Enrico, come faccio a capire che il toro è pettinabile?".
"Non è difficile; pensa a una circonferenza (Fig. 1.c}). E' pettinabile?".
"Ma si che lo è: basta allisciare i "capelli" intorno alla circonferenza stessa, in modo che siano tangenti (Fig. 2.c})".
"Bravo. Hai scoperto che la sfera unidimensionale S^1, è pettinabile. Mentre la sfera S^2, o il pallone da calcio, se preferisci, non lo è (Fig. 1.a}). Il toro, il salvagente per intenderci, è pettinabile (Fig. 3.b}) perchè è l'unione di tante circonferenze intorno a un'altra circonferenza (Fig. 3.a})".
"Ah sì, è chiaro. Ma cosa sono queste tue strane terminologie, S^1, S^2?".
"S^n è la sfera n-dimensionale: S^1, la sfera a una dimensione, è la circonferenza, ossia la linea che racchiude un cerchio. S^2, è la normale sfera, come se fosse la buccia di un'arancia... S^3 è *come se fosse la buccia di un'arancia a quattro dimensioni*, S^4 è la buccia di una...".
"Ehi, piano. Non ti seguo più! S^3 è la buccia di un'arancia a quattro dimensioni? Ma come faccio a immaginarmi una palla a quattro dimensioni?".
"Non è facile immaginarla, ma grazie alla matematica si possono studiare anche questi oggetti fantastici che non si incontrano nella vita reale. E le sfere a dimensione maggiore sono importanti perchè c'è un *importante teorema* che dice che le uniche sfere pettinabili sono S^1, S^3 e S^7... Tutte le altre sfere e, ahimè, anche S^2, l'unica che avrei potuto pettinare a mano, non lo sono...".
Il Bimbo aveva cominciato a prendere gusto al gioco, a capire che le *proprietà topologiche* degli oggetti geometrici potevano studiarsi anche attraverso qualcosa che somigliava all'operazione quotidiana del pettinare.
Prima che il Bimbo potesse chiedere qualcos'altro a Enrico, egli aggiunse:
"Vedi, Bimbo, anche il Pianeta Terra è una sfera e sulla sua superficie spirano i venti. Ebbene, i venti sono come dei "capelli d'aria", delle correnti, tangenti alla superficie terrestre. Per questa ragione sulla Terra vi devono essere sempre almeno due punti in corrispondenza dei quali non vi può essere alcun filo d'aria (Fig. 2.a}). Ve ne possono essere di più, certo, ma in due almeno vi deve essere una quiete assoluta. Se così non fosse, la sfera sarebbe pettinabile. Tutte queste proprietà topologiche cominciarono a essere studiate all'inizio di questo secolo da un grande matematico che di nome si chiamava Enrico come me, ma che di cognome si chiamava Poincaré, il quale ha formulato una celebre congettura (ossia una proprietà che ancora nessuno è riuscito a dimostrare) che porta il suo nome: essa ha a che vedere con le sfere S^3 e, magari, te ne parlerò la prossima volta, se mi verrai ancora a trovare".
Il Bimbo s'era inconsapevolmente lasciato irretire dalle vertiginose astrazioni matematiche alle quali Enrico lo stava iniziando con quella chiacchierata. Ma era tempo ormai di tornare a casa, a fare i compiti, che coincidenza!, proprio quelli di matematica.
Salutò lo strano barbiere, abbandonando a malincuore la sua sala giochi, e in un attimo fu di nuovo fuori, all'aria aperta. Spirava ancora, come quando aveva incontrato Enrico, un venticello leggero ma gelido, mentre il bel sole di quel pomeriggio volgeva al tramonto. Intanto una mamma attraversava la strada, di corsa, tenendo il proprio figlioletto per mano. E gli diceva: "Guarda, guarda. Sei sempre spettinato".
E il Bimbo notò che quel pargoletto aveva davvero una testolina molto, molto rotonda.

Letterio Gatto

a}　　　　b}

Fig. 3. a}, b}.

a} Il toro può vedersi come la superficie di rotazione generata da una circonferenza che ruota intorno a un'altra circonferenza.

b} Dunque il toro è pettinabile. Basta pettinare ciascuna delle circonferenze longitudinali.