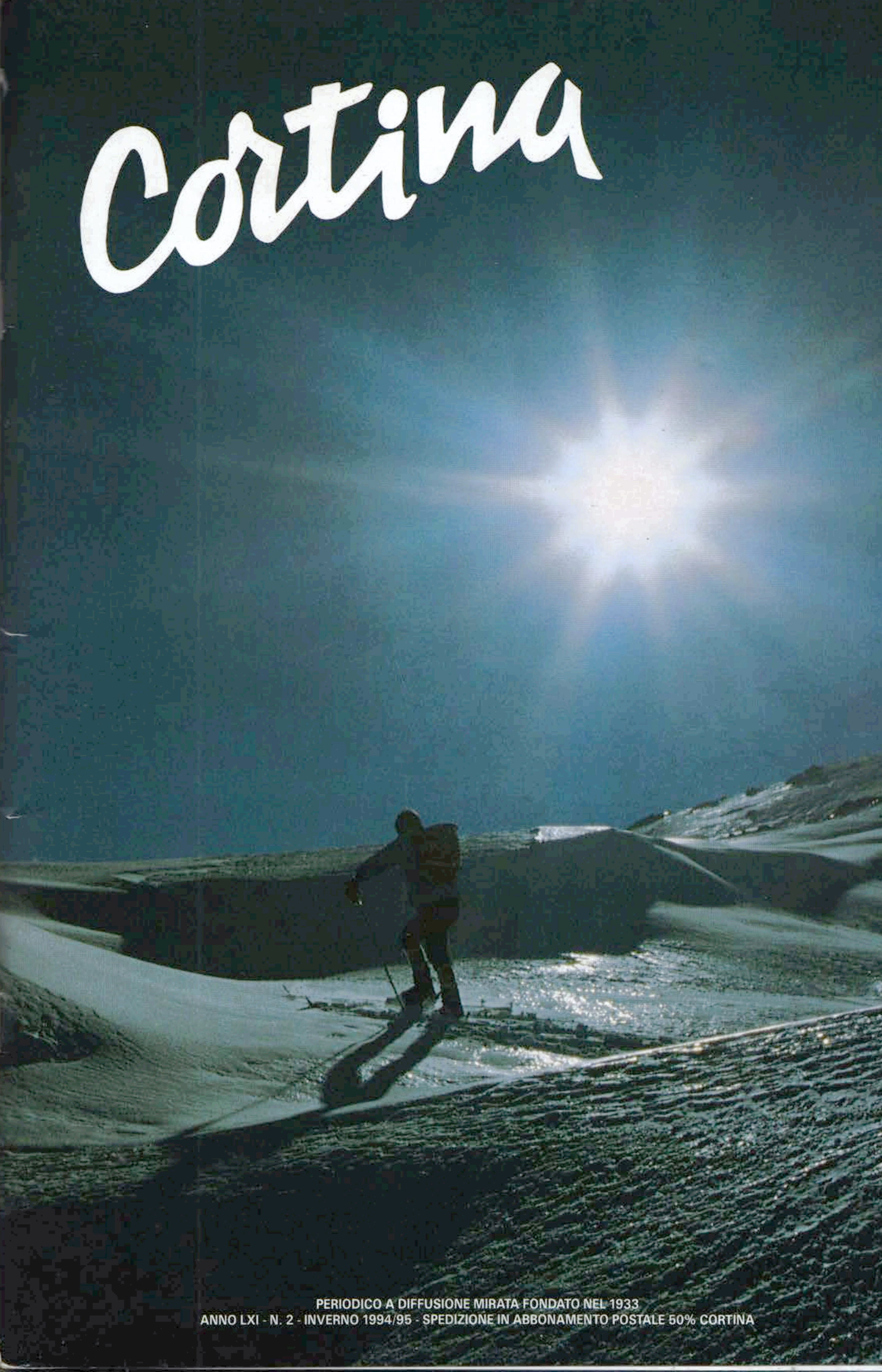
Cortina



PERIODICO A DIFFUSIONE MIRATA FONDATO NEL 1933
ANNO LXI - N. 2 - INVERNO 1994/95 - SPEDIZIONE IN ABBONAMENTO POSTALE 50% CORTINA

Nell'officina di Carlo Federico, il gommista

Ovvero: la curvatura delle superficie

di Letterio Gatto

Il "bimbo" Nicola Dibona con il gommista

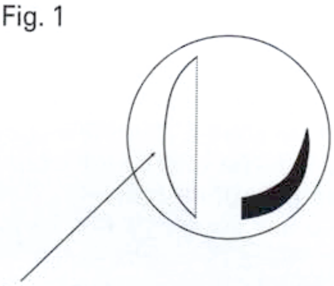
Era un pomeriggio primaverile apparentemente qualunque e il Bimbo si stava annoiando alquanto. Fu allora che, passeggiando, gli tornarono in mente, non si sa come, le strane chiacchiere avute con Bernardo, il fornaio, e con Alberto, l'orologiaio.
In particolare gli era rimasto impresso il consiglio che Alberto, dopo avergli riparato la sveglietta, gli diede prima di congedarlo: "Vai a trovare Carlo Federico, il gommista".
Chissà come, chissà perchè, proprio nel pomeriggio qualunque di cui si diceva, il Bimbo decise di andare a visitare l'anziano gommista, un omone dalla faccia quadrata, con uno strano berretto in testa e, per il tipo di lavoro che faceva, con le mani sempre sporche di grasso.
Mentre i suoi passi lo menavano speditamente verso l'officina, capitò al Bimbo di imbattersi per strada in un omino piuttosto buffo. Si trattava chiaramente di un uomo che conduceva una vita sedentaria: non era grasso, no, ma intorno all'ombelico aveva delle considerevoli rotondità.
Lo stesso particolare gli venne in mente quando entrò nell'officina di Carlo Federico, anch'egli piuttosto corpulento, il quale gli si rivolse in modo piuttosto secco: "Ciao Bimbo, non ho tempo per darti retta. Non vedi che sto lavorando?". Carlo Federico, al contrario di Alberto e Bernardo, non era molto cordiale. Ma non era cattivo. Forse era solo un po' timido. Il Bimbo non sapeva esattamente cosa dire, né aveva il coraggio di dirgli ch'era stato mandato lì dall'orologiaio Alberto. Esordì in un modo qualunque, tanto per attaccare discorso, e gli venne in mente l'omino buffo incontrato poc'anzi.
"Sai, poco fa ho incontrato un omino un po' grasso. Cioè no. Non era grasso, ma aveva la pancia un po' tonda...".
"E quant'era grossa questa pancia?", chiese Carlo Federico in tono decisamente un po' accademico se non aulico, e quasi stranamente interessandosi a quell'incontro apparentemente privo di importanza. "Beh, non saprei. Era più o meno così..." rispose il Bimbo, facendo un gesto largo con ambo le mani, imitando la rotondità di una sfera, proprio intorno all'ombelico.
"Insomma: vuoi dirmi che se ti chiedessi di valutare con esattezza la ciccia che io mi ritrovo proprio qui" e si diede una pacchetta sulla pancia "non lo sapresti dire...".
"Ma no... perchè? Tu conosci un modo?".
"Beh, sì. Si potrebbe calcolare la *curvatura gaussiana* intorno all'ombelico".
"Curvatura gaussiana? Che stai dicendo?".
"Beh, sì", argomentò facendosi più espansivo Carlo Federico: "Prova a disegnare un *triangolo* intorno all'ombelico e poi *misurane la somma degli angoli interni*: tanto più questa somma è maggiore di due angoli retti, tanto più la persona è - non diciamo grassa - tonda...".
"Calma, calma. Non ti sto più seguendo. Che mi stai raccontando?".
L'anziano gommista si dispose allora a fare una chiacchierata col Bimbo su fenomeni che egli, nella sua officina, era ormai abituato a sperimentare ogni giorno.
"Vedi, caro Bimbo. Facendo il gommista io mi trovo tutti i giorni a lavorare con pezzi di superficie. Di gomma, s'intende... Quando ho un po' di tempo libero, invece di limitarmi a fare camere d'aria o sostituire copertoni alle automobili, mi diverto anche a cucire insieme dei rimasugli di gomma. Guarda per esempio questo pallone che mi sono costruito...".
Eh, sì: era proprio una bella palla, di dimensioni pari a quelle usate per i palloni da calcio, costruita cucendo insieme dei pezzettini di gomma di varia forma e poi gonfiata. Lì accanto c'era anche un pallone ovale, tipo quelli da rugby, ma con le punte smussate, e dei salvagenti e altre superficie ancora più strane.
Il Bimbo, che non aveva dimen-

Foto Giomar

ticato quanto aveva appreso nella bottega di Bernardo il fornaio, disse: "questi sono uguali!", alludendo al pallone da calcio e al pallone da rugby.
"Uguali?" domandò stupito Carlo Federico. "Beh, sì. Non proprio uguali. Sono omeoformi... me l'ha spiegato Bernardo il fornaio. Il pallone da rugby si può ottenere da quello da calcio per deformazione continua...".
"Bravo Bimbo... vedo che sai già molte cose. Però vedi, il fatto che queste due superficie (e indicò i due palloni) siano omeomorfe non significa che sono uguali in assoluto: esse sono differenti dal punto di vista metrico. Ecco perchè hanno una forma diversa".
"Non capisco, spiegati...".
"La classificazione delle superficie che ti ha mostrato Bernardo era una classificazione basata sulla topologia... io ti propongo invece di studiare le superficie, come faccio io, da un punto di vista metrico, cioè dal modo che usiamo per misurare le distanze. Per esempio: guarda qui..." e stese un pezzo di gomma sul suo tavolo da lavoro, piantandovi due spilli, e similmente fece sulla palla che, naturalmente, non si sgonfiò perchè la gomma dei gommisti è ben dura... Quindi domandò al Bimbo:
"Sei capace a misurare la distanza tra questi due spilli sul piano?".
"Ma certo!". Prese un righello sporco di grasso che giaceva là, sul tavolo da lavoro, lo posizionò lungo la congiungente i due spilli e misurò: "sette centimetri e mezzo".
"Bene" disse Carlo Federico.
"E ora misura la distanza tra i due spilli sulla superficie del pallone". Il Bimbo, ignaro del fatto che Carlo Federico aveva costruito l'esperimento ad arte, tentò di stendere il righello tra i due spilli, che erano però piuttosto lontani...
"E' difficile", disse, "se i due spilli fossero abbastanza vicini potrei farlo col righello, ma sono troppo lontani. Se mi dai un pezzo di spago lo tendo tra i due punti e poi lo misuro col righello...".

"Bravo Bimbo: hai capito che la *geometria* (ossia: la misurazione delle distanze) della sfera è diversa da quella del piano".
"Ma no, cosa dici... io questo non l'ho proprio capito".
"E invece sì: il piano ha la proprietà che la distanza tra due punti può essere misurata con un righello (un *regolo rigido* dicono i fisici), mentre sulla sfera, o sul *toro...*".
"Toro???".
"Sì, scusa, volevo dire il salvagente, o sull'ovale devi usare una cordicella".
"Va bene, è vero, però poi la cordicella può essere misurata col righello e trovo la distanza vera...".
"Sì, ma è diversa da quella che misureresti pensando ai due spilli come punti dello spazio. Voglio dire: immagina che gli spilli siano lì, dove li vedi, e di far sparire la superficie della sfera. A quel punto i due spilli individuano due punti dello spazio lungo i quali puoi stendere il righello".
"Sì, è vero. E mi troverei una distanza diversa".

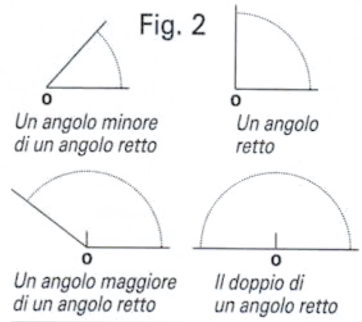
Fig. 1



La cordicella tesa sulla superficie della sfera è più lunga che se tesa in "linea d'aria" (linea tratteggiata)

"Esattamente: questa è la differenza tra il misurare la distanza tra due punti pensati come punti dello spazio o come punti di una superficie. Quindi, come avrai capito, ogni superficie richiede un particolare modo di misurare la distanza e, quindi, che ne individua la sua *geometria*".
"Ma a scuola la maestra ci dice che la geometria studia triangoli, rette, cerchi...".
"Ha quasi ragione: in realtà la geometria studia le proprietà di questi oggetti una volta che si sia stabilito in che modo si debbano misurare le distanze.
Guarda questo pezzo di gomma steso sul tavolo, e piantagli tre spilli a piacere". Il Bimbo eseguì.
"Ora", continuò Carlo Federico, tendi una cordicella tra ciascuna coppia di spilli, in modo da formare un *triangolo*: un triangolo si chiama così perchè ha tre *angoli...* Lo sapevi?".
"Sì, credo di sì".
"Dovresti anche sapere che se tu mettessi i tre angoli di un triangolo uno vicino all'altro, otterresti un angolo che è il doppio di un *angolo retto*".

Fig. 2



o *Si dice "vertice" dell'angolo*

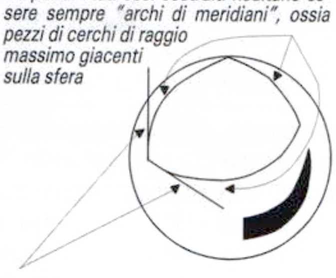
"Sì, credo che la maestra mi abbia detto anche questo".
"Bene: ora pianta i tre spilli sul pallone da calcio che ho costruito e tendi di nuovo la cordicella, proprio come hai fatto sul pezzo di gomma piana".
Il Bimbo, docilmente, eseguì e notò, cosa che peraltro s'aspettava, che i "lati" di questo nuovo strano triangolo si incurvavano lungo la superficie della sfera.
"Prova ora ad immaginare", chiese Carlo Federico, "come può essere la somma degli angoli interni di questo triangolo".
"Ma Carlo Federico, perchè chiami ancora triangolo questa nuova figura?".
"Per due buone ragioni. In primo luogo perchè è una figura che ha tre angoli, in secondo luogo perchè è stata costruita con lo stesso metodo usato sulla gomma piana: ho piantato tre spilli e teso una cordicella".
"Riesco a capire bene il secondo motivo, ma non il primo: cosa intendi per angoli? *L'angolo non è una parte di piano compresa tra due semirette...?*, e qui ho dei "lati" curvilinei...".

continua a pagina 76

da pagina 75

"Caro Bimbo, purtroppo non posso scendere nei dettagli: ti basti per il momento sapere che se la definizione di angolo che tu mi hai dato poteva andar bene ai tempi di Euclide, oggi non funziona più e non andrebbe neppure spiegata in questo modo. Comunque, evitando le polemiche con il cattivo insegnamento che rendono sgradevole la matematica ai ragazzi, per spiegarti cos'è un angolo nel caso del triangolo sulla sfera, nota che se tu ti avvicini a uno degli spilli, le due cordicelle che si separano da esso, lì vicino, sono quasi rettilinee (perchè la superficie della sfera, in "piccoli" *intorni* assomiglia a quella di un piano: per esempio, nella vita di tutti i giorni, la terra ci sembra piatta).

Fig. 3 *Lati un un triangolo su una sfera ottenuto tendendo un filo tra tre punti. I lati così costruiti risultano essere sempre "archi di meridiani", ossia pezzi di cerchi di raggio massimo giacenti sulla sfera*

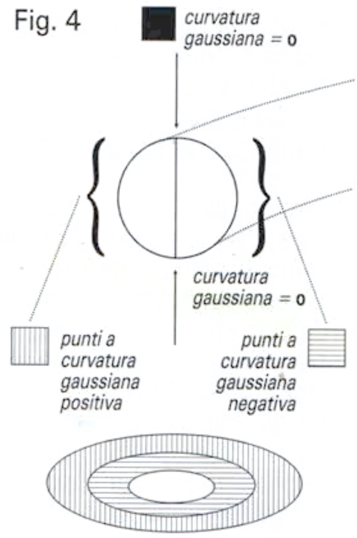


"Tangenti" a due lati del triangolo

L'angolo formato dalle due "tangenti" a due lati è, per definizione, l'angolo tra i due lati del triangolo disegnato sulla sfera

L'angolo sarà allora quello formato dalle *tangenti*, ossia dalle rette uscenti dallo spillo che hanno la stessa direzione di allontanamento delle cordicelle".
"Ho capito", concluse il Bimbo, ancora mantenendo uno sguardo assorto e riflettendo su questi nuovi concetti semplici ma non banali.
"E allora", insistette il buon gommista, "secondo te la somma degli angoli interni di questo triangolo formato sulla sfera è maggiore o minore di due angoli retti?".
"E' maggiore!".
"Bravo: vedi che il modo di misurare le distanze incide profondamente sulla geometria? Ma non è un caso: la geometria è il modo con cui si misurano le distanze".
"Va bene: e allora?".
"E allora senti: secondo te la sfera (il pallone da calcio) è una superficie curva o no?".
"Sì, è curva".
"E perchè?".
"Beh, lo vedo!".
"Già, ma se tu fossi un microbo che viaggia sulla superficie del pallone che, quindi, ti sembrerebbe piatto, come faresti a capire che stai su una superficie curva, poichè non hai l'intuizione spaziale tridimensionale (ossia: non puoi vedere il pallone tutto con un solo colpo d'occhio come abbiamo testé fatto)?".
"Uhmm... non capisco".
"E' semplice: puoi disegnare dei triangoli. Se trovi anche solo un triangolo in cui la somma degli angoli interni è diversa da due angoli retti, la superficie non è piana. Se la somma degli angoli è maggiore di due angoli retti, dici che sei su una superficie che ha *punti a curvatura gaussiana positiva*, se la somma degli angoli è minore di due retti dici che sei su una superficie che ha *punti a curvatura gaussiana negativa*. Se la somma degli angoli è uguale a due retti dici che sei su una superficie che ha *punti a curvatura gaussiana nulla*".
"Ma la sfera è allora una superficie che ha *tutti* i punti a curvatura gaussiana positiva e il piano è una superficie che ha *tutti* i punti a curvatura gaussiana nulla... esistono superficie che hanno punti a diversa curvatura gaussiana?".
"Sì" rispose Carlo Federico.
"Guarda, per esempio, questa camera d'aria gonfiata: un toro o un salvagente se preferisci... questo è l'esempio di una superficie che ha punti di curvatura gaussiana positiva, negativa e nulla... E' facilissimo capire perchè vi siano i punti a curvatura negativa o positiva (basta disegnare degli opportuni triangoli con spilli e cordicella), meno facile capire perchè vi siano punti a curvatura nulla".
"Ma perchè questa curvatura si chiama gaussiana?".
"Perchè tale idea di estendere a superficie qualunque la geome-

Fig. 4



tria del piano venne in mente ad un grande matematico tedesco che, di nome si chiamava Carlo Federico come me. Si tratta di Carlo Federico Gauss (1777 - 1855), che alla sua epoca era riconosciuto come il "Principe dei Matematici" ed è stato, forse, il più grande matematico dell'età moderna".
"Dunque" concluse il Bimbo "ho capito. Se voglio sapere quanto sei grasso, è sufficiente che io disegni un triangolo intorno al tuo ombelico e ne misuri la somma degli angoli interni... guardandoti direi che la tua curvatura gaussiana dovrebbe essere parecchio positiva...".
Come dire, insomma, che l'anziano gommista era un po' grassottello.
Sul viso di Carlo Federico si dipinse repentinamente un'espressione di stizza, avvisaglia di un rapido cambiamento d'umore: "Beh, c'è chi ha la pancia molto più curva della mia e poi... e poi lasciami lavorare: con tutte queste diavolerie di triangoli e curvature credo che abbiamo già giocato abbastanza...".
E il Bimbo, visibilmente dispiaciuto, ma con tipico candore infantile chiese, un po' incerto:
"Carlo Federico: posso tornare a giocare con te?".
Carlo Federico lo guardò, trattenne a stento un sorriso e poi, lasciandosi andare, ridacchiò divertito: "E perchè no, Bimbo, e perchè no?".

Letterio Gatto